Keine Ahnung von Tangenten und Normalen

Wie bekommt man eine

Tangentengleichung
Normalengleichung
?

Datei Nr. 4[illegible]040

Stand 4 Januar 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Tangentenaufgaben gehören zum Standard bei Aufgaben zu Funktionen bzw. Kurven.
(Ich spreche jetzt nicht von Kreistangenten, denn dazu gibt es andere Methoden als in diesem Text geschildert.)

Dazu muss einiges an Grundwissen vorhanden sein:

1. Kenntnisse über Geradengleichungen $y = mx + n$
2. Berechnungsverfahren einer Sekantensteigung und einer Tangentensteigung.
   Also Kenntnis der Bedeutung der 1. Ableitungsfunktion für die Tangentensteigung.
3. Aufstellen einer Geradengleichung
   entweder mit dem Ansatz $y = mx + n$
   oder besser mit der Punkt-Steigungs-Form: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
4. Anpassung der Punkt-Steigungs-Form an Tangenten.
5. Anpassung der Punkt-Steigungs-Form an Normalen.

In diesem kurzen kompakten Text werden die wichtigen Fakten und Methoden beschrieben.

Im Text 42041 Tangenten-Aufgaben gibt es zahlreiche Aufgaben zum Üben.
Dort werden auch die Spezialaufgaben besprochen:
Tangenten (oder Normalen) parallel oder senkrecht zu einer anderen Geraden
Tangente (oder Normale) von einem externen Punkt Q an die Kurve legen
Die Sammlung von 13 teils umfangreichen Trainingsaufgaben steht auf den Seiten 30/30.

Inhalt

1 Geradengleichungen verstehen

Grundlagen zur Wiederholung

Geradengleichungen sind beispielsweise:

g_1: $y = 2x - 3$
g_2: $y = \frac{2}{3}x - 1$
g_3: $y = -x + 2$
g_4: $y = \frac{1}{2}x$
g_5: $y = -3$

Die Geraden g_1 bis g_5 haben eine spezielle Gleichungsform:

$$\boxed{y = \boxed{m}x + \boxed{n}}$$

Steigung   y – Achsen – Abschnitt

Unter der **Steigung** einer Geraden (die nicht zur y-Achse parallel sein darf) versteht man den Tangens ihres Steigungswinkels:

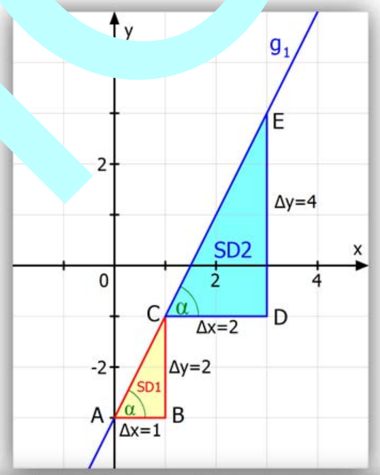
$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Kennt man zwei Punkte einer Geraden, dann kann man aus ihren Koordinaten die Steigung m so berechnen:

Δx ist die Differenz ihrer x-Koordinaten, also $x_1 - x_2$

Δy ist die Differenz ihrer y-Koordinaten, also $y_1 - y_2$

Hier die Schaubilder der 5 Geraden g_1 bis g_5:



Für g_1: $y = 2x - 3$ wurden zwei Steigungsdreiecke eingezeichnet.

Für das rote gilt: $m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

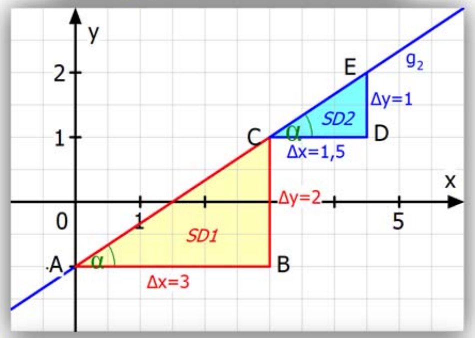
Für das blaue gilt: $m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$

Und die Gerade schneidet die y-Achse bei y = -3, also in $A(0\,|\,-3)$.

Das erhält man rechnerisch aus der Geradengleichung, indem man x = 0 einsetzt: $y_A = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$.

Die Gerade g_2: $y = \frac{2}{3}x - 1$ ist nicht so leicht einzuzeichnen.

Wie zeichnet man die Steigung $m = \frac{2}{3}$ ein?

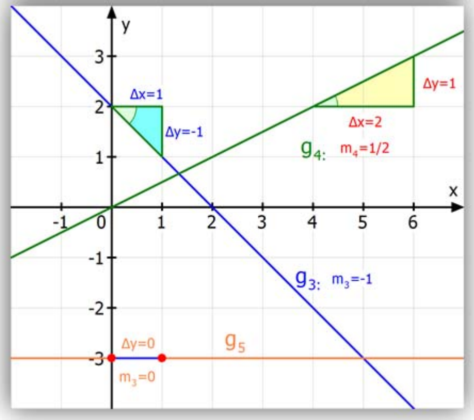


Hier nimmt man die Formel: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \Delta y = 2 \\ \Delta x = 3 \end{cases}$.

(Steigungsdreieck 1)

Oder so: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1{,}5}$ $\begin{cases} \Delta y = 1 = 2\text{ Kästchen} \\ \Delta x = 1{,}5 = 3\text{ Kästchen} \end{cases}$

(Steigungsdreieck 2)



Die Gerade g_3: $y = -x + 2$ hat die Steigung $m = -1$.

Negative Steigung bedeutet fallende Gerade,

Die Gerade g_4: $y = \frac{1}{2}x$ hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$ und geht durch den Ursprung. Das erkennt man an der Gleichung, weil der Achsenabschnitt fehlt, also 0 ist.

g_5: $y = -3$ hat m = 0, daher fehlt x. g_5 ist parallel zur x-Achse. Das Steigungs"dreieck" ist hier nur eine horizontale Strecke. Alle Punkte auf g_5 haben die y-Koordinate -3.

Zusammenfassung: Die Gleichung einer Geraden hat einer dieser drei Formen:

(1) $\boxed{y = m \cdot x + n}$ falls die Gerade nicht parallel zur x-Achse oder y-Achse ist.

(2) $\boxed{y = n}$ falls die Gerade parallel zur x-Achse ist.

(2) entsteht aus (1) durch m = 0.
(Eine zur x-Achse parallele Gerade hat die Steigung 0.)

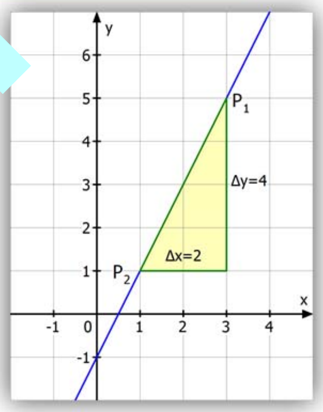
(3) $\boxed{x = c}$ falls die Gerade parallel zur y-Achse ist.

Den 3. Fall benötigen wir hier nicht, denn Tangenten (unser Thema!) [illegible] bei Funktionen nie parallel zur y-Achse.

2 Tangentengleichungen aufstellen.

Vorübung.

Aufgabe 1: Stelle die Gleichung der Geraden durch $P_1(3|5)$ und $P_2(1|1)$ auf.



Wissen: Die Steigung ist der „Differenzenquotient“ $\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Die Differenzen der Koordinaten [illegible] P_1 und P_2 werden berechnet und eingesetzt:

Ausführliche Rechnung: $m = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

Doch jetzt fehlt noch der y-Achsenabschnitt!

Er soll berechnet werden, also [illegible] die Zeichnung [illegible] als Kontrolle dienen. **Es [illegible] Berechnungsmöglichkeiten:**

1 Möglichkeit: Berechnung des Achsenabschnitts durch Einsetzen von m und P_2 (oder auch P_1) in:

$$y = m \cdot x + n$$

$$1 = 2 \cdot 1 + n$$

Daraus folgt: $n = -1$

Ergebnis: g: $\boxed{y = 2x - 1}$

2. Möglichkeit: Verwendung der ***Punkt-Steigungs-Form***: $\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$

Es ist egal, welchen Punkt man einsetzt:

Einsetzen von $P_1(3|5)$

$$y - \boxed{5} = \boxed{2} \cdot \left(x - \boxed{3}\right)$$

$$y - 5 = 2x - 6 \quad |+5$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Einsetzen von $P_2(1|1)$:

$$y - \boxed{1} = \boxed{2} \cdot \left(x - \boxed{1}\right)$$

$$y - 1 = 2x - 2 \quad |+1$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Berechne die Gleichung der Sekante durch $A(1 | y_A), B(3 | y_B)$

b) Berechne die Gleichung der Tangente in B.

Lösung: Zuerst muss man die y-Koordinaten der Kurvenpunkte berechnen:

$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ Also ist $A(1 | 0)$

$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 9 - 9 + 2 = 2$ Also ist $B(3 | 2)$.

a) **Steigung der Sekante.** Der Differenzenquotient liefert $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{[illegible]} = \frac{2}{[illegible]} = 1$

Aufstellen der Gleichung mit der **Punkt-Steigungsform**:

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad [illegible] = x - 1$$

b) Aufstellung der Tangentengleichung.

Weil man für die Tangente nur einen Punkt kennt, [illegible] die [illegible] dem Differenzenquotient berechnen. Man brauch davon [illegible] Gr[illegible]wert für $\Delta x \to 0$.
So entsteht der Differentialquotient, [illegible] man auch 1. [illegible]leitung [illegible]nnt.

Man berechnet die Tangentensteigu[illegible] Ableitun[illegible]

Aus der Funktionsgl[illegible]ung $[illegible](x) = x [illegible]$

folgt die 1. Able[illegible]g: $f[illegible] = 2x - 3$

Merke: Mit f [illegible]chnet [illegible] y-Koordinaten, mit f' Tangentensteigungen.

Tangent[illegible]g in A: $m_t = f'([illegible] 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Auf[illegible]len der Glei[illegible]g mit d[illegible] **[illegible]Steigungsform**:

$$y - y_B = \boxed{m_t} \cdot (x - [illegible]) \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = \boxed{3} \cdot (x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 3x - 7}$$

Merke: [illegible] Gleich[illegible]g der Tangente an der Stelle a einer Kurve
ents[illegible]us dieser Punkt-Steigungsform für Tangenten:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$$

Denn $f(a)$ ist die y-Koordinate des Berührpunktes an der Stelle x = a

und $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an der Stelle a.

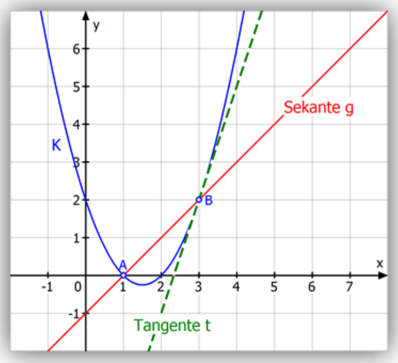


Abbildung zur Aufgabe 2.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$.

Berechne die Gleichungen der Tangenten an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.

Lösung: Ableitungsfunktion: $f'(x) = x^2 - 2$

a) Zu $x_1 = 0$ gehört $y_1 = f(0) = 1$.

Der Berührpunkt ist somit: $B_1(0|1)$.

Tangentensteigung in B_1: $m_T = f'(0) = -2$

B_1 und m_T werden jetzt in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

Tangentengleichung: $y - 1 = -2(x - 0)$

$y - 1 = -2x$

T_1: $\boxed{y = -2x + 1}$

b) Zu $x_2 = 3$ gehört $y_2 = f(3$ [illegible] $\cdot 27 - 6$ [illegible] $= 9 - 6 + 1 = 4$.

Der Berührpunkt ist somit: $B_2(3|4$ [illegible]

Tangentensteigung in B_2: $m_T = f'(3)$ [illegible] $9 -$ [illegible] 7

B_2 und m_T werden jetzt in die Punkt-Steigungs-[illegible]rm ei[illegible]etzt:

Tangentengleichung: [illegible] $4 = 7(x -$ [illegible]

[illegible] $- 4$ [illegible] 21

T_2: [illegible] $7x - 17$

c) Zu $x_3 = -2$ ge[illegible] $y_3 = f($ [illegible] $\frac{1}{3} \cdot (-8) + 4 + 1 = -\frac{8}{3} + 5 = \frac{15}{3} - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$.

Der Berührp[illegible] ist somi[illegible] $B_3(-2|\frac{7}{3})$.

Tangentensteigu[illegible]: m [illegible] $(-2) = 4 - 2 = 2$

B[illegible]werden je[illegible] die Pun[illegible]teigungs-Form eingesetzt:

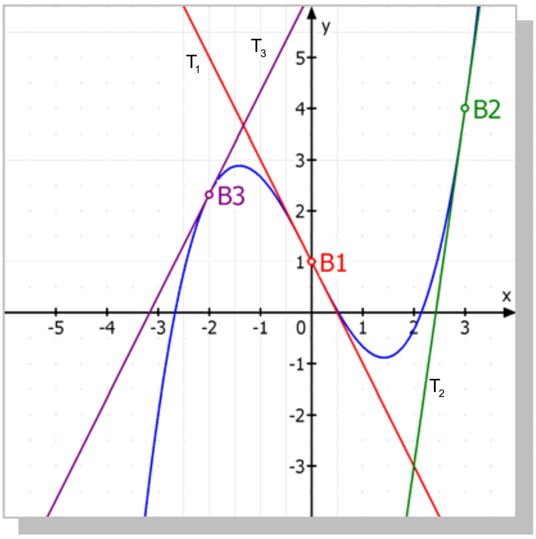
[illegible]angenteng[illegible]ung: $y - \frac{7}{3} = 2(x + 2)$

$y - \frac{7}{3} = 2x + 4 \quad | + \frac{7}{3}$

$y = 2x + 4 + \frac{7}{3}$

T_3: $\boxed{y = 2x + \frac{19}{3}}$

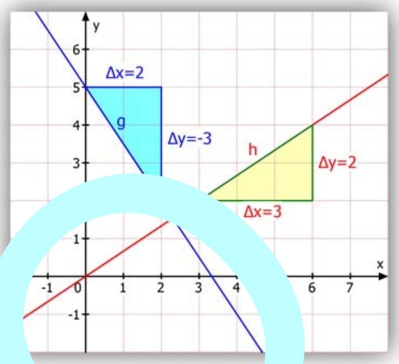
Eine typische Aufg[illegible]der man mit Brüchen rechnen muss. Die Ve[illegible]wendung von Dezimalzahlen wäre ungeschickt und verbietet sich, weil man dann nur Näherungsergebnisse bekommt.



3 Normalengleichungen aufstellen.

Grundwissen über orthogonale Geraden:

Wenn zwei Geraden (die nicht parallel zu den Koordinatenachsen sind) orthogonal sind, dann ist die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen:



$\boxed{m_g = -\frac{1}{m_h}}$ bzw. $\boxed{m_g \cdot m_h = -1}$

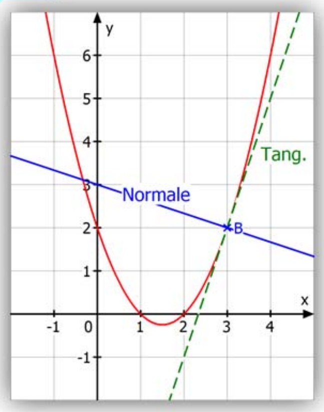
Beispiel Abbildung: $m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

$m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$

Was ist eine Normale?

Eine **Tangente** berührt eine Kurve in einem Punkt.
Die Gerade, die auf der Tangente im Berührpunkt senkre[illegible]ht, heiß[illegible]**rmale**.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion f durch [illegible]$) = $[illegible]$3x+2$.
Berechne die Gleichu[illegible]malen in B[illegible]$|2)$.



1. Schritt: Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2$[illegible]

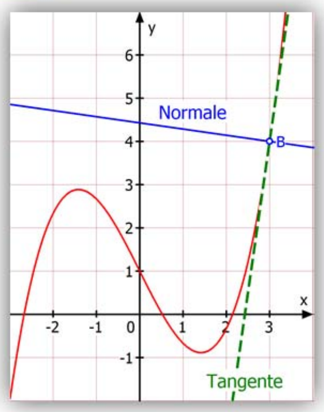
2. Schritt: Tangentensteig[illegible] in B: $\boxed{m_t = f'(3)} = 2$[illegible]$3 = 3$

3. Schritt: Normalenste[illegible]g in B: $\boxed{[illegible]_n = -\frac{1}{m_t}} = -\frac{1}{[illegible]}$

4. Schritt: P[illegible]ungsfor[illegible] $y - 2 = -$[illegible]$-3)$

Ergebni[illegible] [illegible]ale: [illegible]$_3 x + 3$

Aufgabe [illegible] Gegeben is[illegible]e Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$.
Berechn[illegible]e Gleichung der Normalen bei $x_B = 3$.



1. Schritt: Ableit[illegible]ktion: $f'(x) = x^2 - 2$

2. Schritt: y-Koordinate von B: $y_B = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$

2. Schritt: Tangentensteigung in B: $\boxed{m_t = f'(3)} = 9 - 2 = 7$

3. Schritt: Normalensteigung in B: $\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t}} = -\frac{1}{7}$

4. Schritt: Punkt-Steigungsform: $y - 4 = -\frac{1}{7}(x - 3)$

Ergebnis: Normale: $\boxed{y = -\frac{1}{7}x + \frac{31}{7}}$

4 Übersicht:

WISSEN: Die **Steigung einer Tangente** kann man mit der **1. Ableitungsfunktion** berechnen:
Setzt man in $f'(x)$ die x-Koordinate des Berührpunkts ein, erhält man als Wert die **Tangentensteigung**:

$$\boxed{m_T = f'(x_1)}$$

Mit dieser Formel entsteht aus der Punkt-Steigungs-Form die

Tangentengleichung: $\boxed{y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)}$

Oder mit $y_1 = f(x_1)$: $\boxed{y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)}$

WISSEN: Man kann auch die Steigung einer **Normalen** mit der **1. Ableitungsfunktion** berechnen:
Setzt man in $f'(x)$ die x-Koordinate des Berührpunkts ein, erhält man zunächst als Wert die **Tangentensteigung**:

$$\boxed{m_T = f'(x_1)}$$

Der negative Kehrwert davon ist dann die **Normalensteigung:**

$$\boxed{m_N = -\frac{1}{f'(x_1)}}$$

Denn wenn N auf T senkrecht steht, gilt: $m_N = -\frac{1}{m_T}$,

Mit dieser Formel entsteht aus der Punkt-Steigungs-Form die

Normalengleichung: $\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1)}$

Oder mit $y_1 = f(x_1)$: $\boxed{y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1)}$